TP : Pendule de Pöhl ; Préparation à compléter

Noms prénoms : Moukoumi Elysée Shalom / Cadilhac Alexandre / Devaux Fabien

**Préparation 1 :** Calcul de la constante de torsion du ressort .

Afin de faire tourner le disque d’un angle *θ* par rapport à sa position d’équilibre l’opérateur doit exercer sur celui-ci en un point M de la périphérie du disque une force d’intensité *F.*

* + Dans quelle direction l’opérateur doit-il exercer cette force de manière à ce que le rayon *R* du disque représente le bras de levier ?

L’opérateur doit appliquer la force sur le point M orthogonalement à dans le sens anti-horaire.

* + Compléter le schéma ci-dessous en indiquant au point M.

- Exprimer le moment par rapport à Δ de cette force exercée par l’opérateur noté MΔ(.

🖸



*+*

*M*

θ

et sont orthogonaux

*M*

- le moteur et le frein ne sont pas alimentés donc seuls les moments de rappel M1/Δ et celui de l’opérateur MΔ( agissent sur le disque.

L’opérateur en exerçant la force maintient au repos le disque.

Que peut-on donc dire de la somme de ces moments ?

La somme de ces moments est égale à 0 :

* + En déduire l’expression de la constante *C* de torsion du ressort en fonction de *R*, *F* et *θ.*

=> ⬄ avec

* + Nous avons mesuré à l’aide d’un dynamomètre qu’il fallait appliquer une force *F* de 0,2 N en périphérie du disque si nous voulions maintenir le disque écarté d’un angle θ de par rapport à sa position d’équilibre Le rayon *R* du disque est de 10 cm.

Calculer la valeur de la constante *C* de torsion du ressort. *Préciser son unité*:

AN :

Remarque : La présence du disque n’a pas d’influence dans la détermination de *C* constante de torsion du ressort. En effet le disque étant ici au repos, le moment d’inertie du disque n’intervient pas.

**Préparation 2 :** Montrer que l’application du théorème du moment cinétique au disque en oscillations forcées avec frottements, aboutit à une équation différentielle qui peut se mettre sous la forme :

Avec *σ* : le coefficient d'amortissement et *ω*0 : la pulsation propre des oscillations.

Identifier les expressions de et *σ.*

On peut donc poser

⬄ ⬄

**Préparation 3 :** Pour mesurer l'amortissement des oscillations en régime pseudopériodique, on mesure expérimentalement le **décrément logarithmique, .** δ = ln [

Ecrire

Sachant que simplifier l’expression précédente :

Or

Que deviennent et δ ?

On a calculé on peut donc calculer δ :

En utilisant l’expression de la pseudopériode T, déterminer celle du décrément logarithmique δ uniquement en fonction du coefficient d’amortissement :

Dans le cas d’un faible amortissement <<1, **δ** 0** et **0**.**

**Point info :** le décrément logarithmique :

*En* [*physique*](http://fr.wikipedia.org/wiki/Physique)*, le terme* ***décrément logarithmique*** *désigne la mesure* [*logarithmique*](http://fr.wikipedia.org/wiki/Logarithme) *de la décroissance* [*périodique*](http://fr.wikipedia.org/wiki/P%C3%A9riode_(physique)) *d'une grandeur* [*pseudo-oscillatoire*](http://fr.wikipedia.org/wiki/R%C3%A9gime_pseudo-oscillatoire)*. Elle est définie comme le logarithme du rapport d'une grandeur à une date t sur la même grandeur à la date (t + T), T représentant la pseudo-période de la grandeur. Le* ***décrément logarithmique*** *est donc une* [*grandeur sans dimension*](http://fr.wikipedia.org/wiki/Grandeur_sans_dimension)*.*

|  |  |
| --- | --- |
| La courbe expérimentale a l’allure suivante : |  |
| le décrément logarithmiquedes oscillations est  *.* | |

**Remarque : Il est plus précis de calculer ce décrément sur plusieurs périodes.**

Dans le cas d’un calcul sur 5 périodes,le calcul de  devient : .

**Préparation 4 :** En régime forcé sinusoïdal, le second membre de l’équation différentielle établie précédemment = est sinusoïdal. Utiliser la notation complexe et donner l’expression de *θ* en fonction de .

On donne , ⬄ et

On passe en notation complexe : et

 : on pose le polynôme caractéristique :

On a un régime pseudopériodique donc Δ< 0

:

On réécrit l’équation :

*On introduira ensuite la pulsation réduite* *et la constante de torsion C dans l’expression de* *θ*.

En déduire l’expression de l’amplitude des oscillations .

𝜃m= Mext∆J𝛥∗1(𝜔02−x2∗𝜔02) ² + (2∗𝜎∗𝜔02∗x)²

Lorsqu’un phénomène de résonance en amplitude a lieu, comment est le dénominateur de ?

Dans ce cas, le dénominateur (𝜔02−x2∗𝜔02)²+(2∗𝜎∗𝜔02∗x)² dans 𝜃m=Mext/∆J𝛥∗1(𝜔02−x2∗𝜔02)²+(2∗𝜎∗𝜔02∗x)² devient très petit

Poser X = x2 et réécrire le dénominateur :

Détermination de l’expression de pour un extrémum du dénominateur :

*Rappel : l’extremum d’une fonction se produit lorsque sa dérivée première s’annule*

En déduire et montrer que celui-ci n’existe que si σ <

On calcule donc la dérivée première de cette fonction par rapport à X :

ddX(𝜔02−X∗ 𝜔02)+(2∗𝜎∗𝜔02∗X)²=−2∗𝜔02∗(𝜔02−X∗𝜔02)+4∗𝜎²∗X∗𝜔02X

On cherche ensuite les valeurs de X pour laquelle cette dérivée s’annule :

2∗𝜔02∗𝜔02−Xr∗𝜔02+4∗𝜎2∗Xr∗𝜔02Xr=0

On peut simplifier l’expression :

2∗Xr∗𝜎²∗𝜔02=𝜔04−Xr∗𝜔04

2∗𝜎²∗Xr=𝜔02−Xr∗𝜔02

2∗𝜎2∗Xr+Xr∗𝜔02=𝜔02

Xr =𝜔022∗𝜎2+𝜔02

On peut maintenant montrer que Xr n'existe que si sigma s < :

Xr existe si le dénominateur est supérieur à zéro, 2∗𝜎2+𝜔02>0

2∗𝜎2+𝜔02>0

𝜎2>−𝜔022

𝜎>−𝜔022

𝜎>i∗𝜔02

𝜎<

*Cet extremum est un minimum si sa dérivée seconde est de signe positif.* Montrer qu’il s’agit bien d’un minimum

En déduire l’expression de la fréquence de résonance. Montrer que celle-ci s’écrit : .

est lié à la fréquence de résonnance par la relation :

est la fréquence propre du système, on l’obtient de cette manière :

En utilisant l’expression de trouvée précédemment, on a :

Donc :

On peut simplifier cette expression en utilisant la relation et en écrivant :

Où θ est un angle tel que , ainsi :

On obtient ensuite grâce à l’expression de  :

Et finalement on prend et on obtient :